



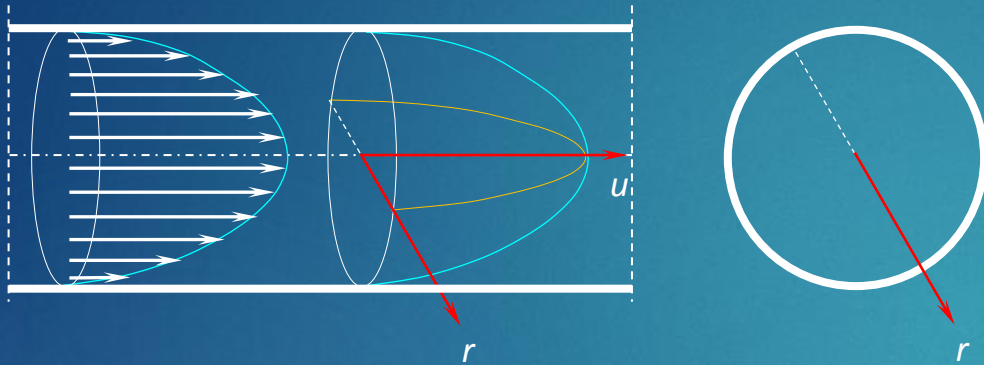
Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

TURBOLENZA

Esperienze di Reynolds

► Corrente in condotta a sezione circolare



- ✓ simmetria assiale distribuzione $u = u(r)$
- Definizione del numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} = \sim \frac{u \partial u / \partial r}{\nu \partial^2 u / \partial r^2}$$

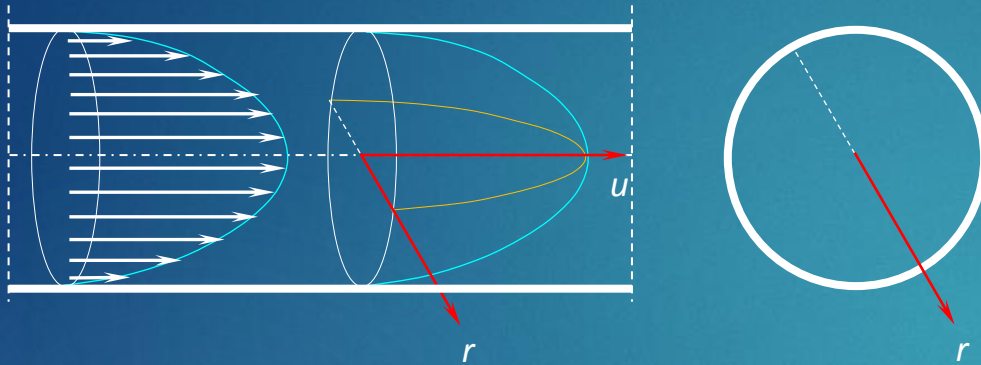
- $U = \frac{Q}{\Omega}$ velocità media della corrente
- D diametro della tubazione
- ✓ Ordine di grandezza del rapporto fra termini convettivi e termini viscosi



- ✓ Regime laminare: mancanza di mescolamento, possibilità di moto stazionario propriamente detto
- ✓ Regime di transizione: perdita regolarità, non mescolamento
- ✓ Regime turbolento: intenso mescolamento (crescente con Re), moto essenzialmente vario

Esperienze di Reynolds

► Corrente in condotta a sezione circolare



- ✓ simmetria assiale distribuzione $u = u(r)$
- Definizione del numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} = \sim \frac{u \partial u / \partial r}{\nu \partial^2 u / \partial r^2}$$

- $U = \frac{Q}{\Omega}$ velocità media della corrente
- D diametro della tubazione

- ✓ Ordine di grandezza del rapporto fra termini convettivi e termini viscosi



- ✓ R. laminare: reversibilità dei processi (non mescolamento)
- ✓ R. turbolento: irreversibilità dei processi (mescolamento)



Caratteristiche dei regimi di moto

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} = \sim \frac{u \partial u / \partial r}{\nu \partial^2 u / \partial r^2}$$

$\lesssim 2100 - 2300$ regime laminare
 $\approx 2300 - 4000$ regime di transizione
 $\gtrsim 4000$ regime turbolento

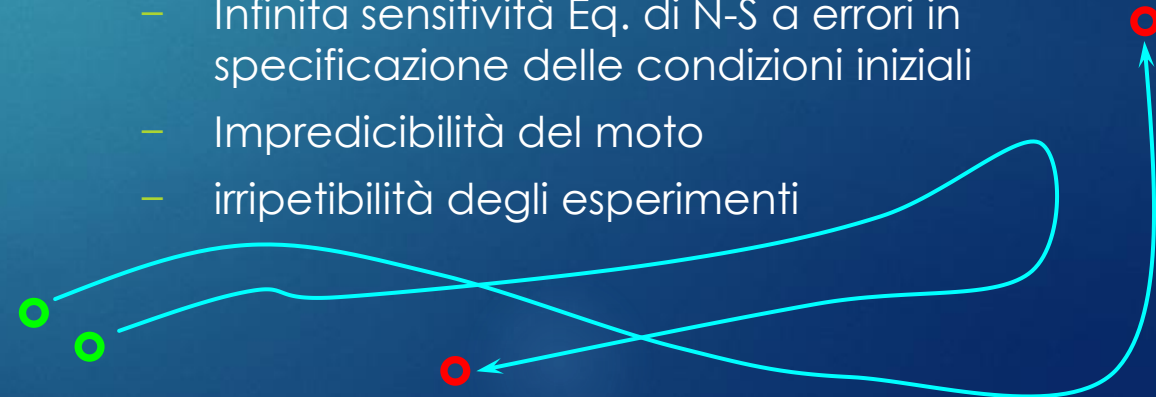
► Regime Laminare ($Re < \approx 2100-2300$)

- Assenza di mescolamento
- Reversibilità dei processi
- Possibilità di moto stazionario
- Viscosità dominante su inerzia convettiva
- Perturbazioni vengono dissipate da viscosità
 - predicibilità del moto
 - Ripetibilità degli esperimenti



► Regime Turbolento ($Re > \approx 4000$)

- Intenso mescolamento (crescente con Re)
- Irreversibilità dei processi
- moto essenzialmente vario
- Inerzia convettiva dominante su viscosità
- Perturbazioni vengono amplificate
 - Amplificazione degli errori (fenomeno caotico)
 - Infinita sensibilità Eq. di N-S a errori in specificazione delle condizioni iniziali
 - Impredicibilità del moto
 - irripetibilità degli esperimenti



Analisi statistica della turbolenza

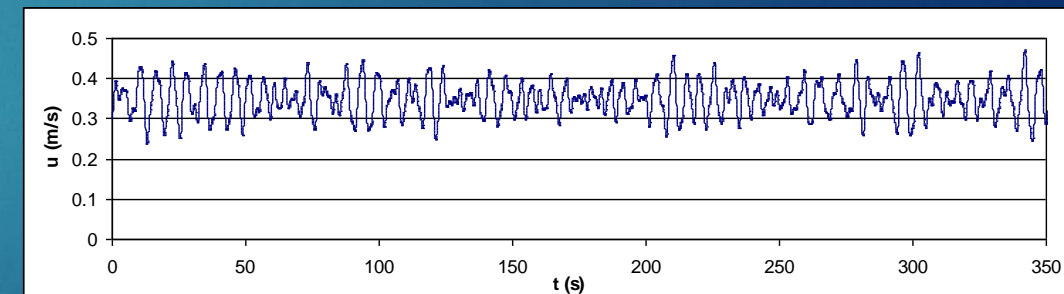
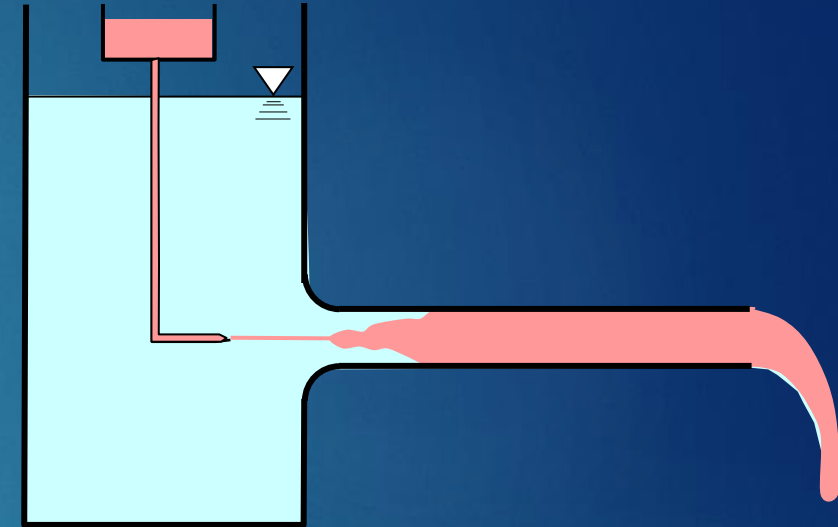
► Flusso turbolento in condotta a sezione circolare

- Livello serbatoio costante (approssimativamente)
- Apertura rubinetto fissata
- Misure effettuate
 - Velocità puntuale $u(t)$ (p.es. componente assiale)
 - Volumi V_k effluenti in intervalli di durata costante Δt
 - Portate medie negli intervalli Δt : $Q_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} Q(t) dt$

• Risultati delle misure

- $u(t)$ oscilla attorno a un valore medio \approx costante:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k+\Delta t} u(t) dt \text{ per } \Delta t \text{ sufficientemente ampio}$$
- La portata istantanea $Q(t)$ è anch'essa oscillante
- Per Δt sufficientemente ampio, $Q_k \approx$ costante
- ✓ Il moto è *stazionario in media* (valori medi assiali costanti) e uniforme *in media* (valori medi trasversali nulli)



- ✓ Da un punto di vista pratico è sufficiente la conoscenza della portata media \approx costante
- ✓ La portata è determinata dalla \bar{u} (componente di trasporto)



Analisi statistica della turbolenza

- N prove ripetute di flusso turbolento in condotta a sezione circolare. In ciascuna prova:

- Livello del serbatoio costante (approssimativamente)
- Apertura progressiva del rubinetto con legge temporale prescritta
- Misure effettuate
 - Velocità puntuale $u(t)$ (p.es. componente assiale)

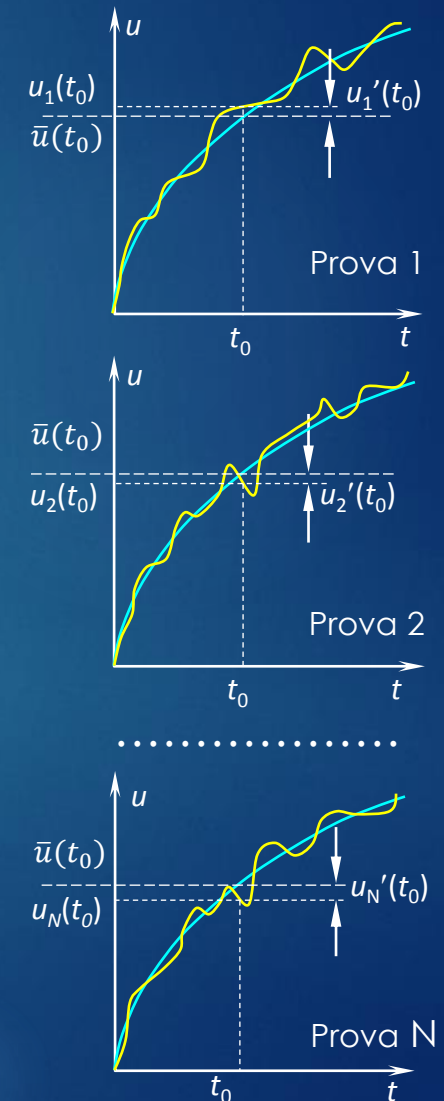
- Risultati delle misure

- $u_n(t)$ oscilla attorno a una linea di tendenza \approx costante:
- Per ciascun istante temporale t_0 si calcola la media di insieme

$$\bar{u}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n(t_0) \quad (\text{approssimazione del } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n(t_0))$$

- ✓ Il moto è vario anche in media (i valori medi dipendono dal tempo)
- ✓ In pratica può essere sufficiente conoscere l'andamento della $\bar{u}(t_0)$

- Problema: determinare equazioni per il campo delle velocità medie





Equazioni per le parti medie

► Decomposizione di Reynolds

$u = \bar{u} + u'$ (esempio velocità assiale in un punto, ad un generico istante di tempo)

- u valore istantaneo
- $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n$ parte media, o *componente di trasporto* (media di insieme, caso generale)
- u' parte *fluttuante* o *pulsante*, o *componente di agitazione*
- ✓ $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n$ approssimazione di $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n$ per N abbastanza grande
- ✓ In un insieme di N prove (*realizzazioni*) $\bar{u} = \text{cost}$, u, u' diversi da prova a prova (u_n, u'_n)

• Proprietà della parte pulsante

$$\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{u} + u'_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{u} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_n = \bar{u} + \bar{u'} \quad \longrightarrow \quad \bar{u'} = 0$$

✓ il valore medio delle parti pulsanti è nullo

• Moti stazionari in media: è possibile ottenere la parte media da un'unica realizzazione del processo?

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(t) dt \quad (\text{media locale}) \quad \text{se il processo è ergodico} \quad (\text{stazionarietà non implica ergodicità})$$



Equazioni per le parti medie

► Equazione di continuità ($\rho = \text{cost}$)

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{sulla base della decomposizione di Reynolds}$$

- Media di insieme dell'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_{j_n})}{\partial x_j} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial u'_{j_n}}{\partial x_j} = \frac{1}{N} N \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u'_{j_n} \right) = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}'_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \\ &\quad \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \end{aligned}$$

- ✓ Equazione per le parti medie formalmente identica all'equazione per le quantità istantanee

- Equazione per le parti pulsanti

$$\frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{per le quantità istantanee; } \frac{\partial (\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{istantaneamente})$$

- ✓ Equazione formalmente identica anche per le parti pulsanti



Equazioni per le parti medie

- ✓ Il risultato per equazione di continuità dipende dalla linearità dell'equazione
- ✓ L'applicazione della media di insieme a un termine lineare produce un termine analogo per la parte media
- Equazione di Navier-Stokes ($\rho = \text{cost}$)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = f_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \longrightarrow \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} (\bar{u}_j + u'_j) = \bar{f}_{m_i} + f'_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}$$

- Media di insieme dell'equazione

- ✓ $\frac{\partial u_i}{\partial t}, f_{m_i}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$ sono termini lineari \longrightarrow la media di insieme produce $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}, \bar{f}_{m_i}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$

- ✓ L'unico termine non lineare (se $\rho = \text{cost}$) è il termine di inerzia convettiva

$$\overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} (\bar{u}_j + u'_j)} = \overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \bar{u}_j + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} u'_j + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j} = \overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \bar{u}_j} + \overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} u'_j} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}'_j + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} u'_j$$

- Annullando le medie di parti pulsanti si ottiene:

$$\overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} (\bar{u}_j + u'_j)} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j} \quad \text{contenente un termine aggiuntivo al termine per le parti medie}$$



Equazioni per le parti medie

- Elaborazione del termine aggiuntivo

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j = \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} - \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} u'_i = \frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j} \text{ per l'equazione di continuità per le parti pulsanti} \Rightarrow \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j} = \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}$$

- Equazione di Reynolds

Sostituendo i termini derivanti dalla media di insieme si ottiene (Equazione di Reynolds):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j = \bar{f}_{m_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \Rightarrow \rho \frac{D \bar{u}_i}{Dt} = \rho \bar{f}_{m_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial (\rho \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}$$

- ✓ I termini $\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ sono detti *sforzi turbolenti* o *sforzi di Reynolds* $\Rightarrow \rho \frac{D \bar{u}_i}{Dt} = \rho \bar{f}_{m_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial \tau_{Rij}}{\partial x_j}$
- ✓ In quanto derivanti da un termine di inerzia, gli sforzi di Reynolds sono associabili a forze d'inerzia
- ✓ Lo stato di sforzo turbolento è rappresentato da un tensore simmetrico ($\tau_{Rij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \overline{u'_j u'_i} = \tau_{Rji}$)
- ✓ Forma dell'equazione di Cauchy per le grandezze medie: $\rho \frac{D \bar{u}_i}{Dt} = \rho \bar{f}_{m_i} + \frac{\partial (\bar{\tau}_{ij} + \tau_{Rij})}{\partial x_j}$

$$\rho \frac{D \vec{\bar{u}}}{Dt} = \rho \vec{\bar{f}}_m + \nabla \cdot (\vec{\bar{\tau}} + \underline{\underline{\tau_R}})$$



Equazioni per le parti medie

► Sforzi turbolenti

- ✓ costituiscono incognite aggiuntive al problema idrodinamico
- ✓ rappresentazione degli sforzi turbolenti su base deduttiva problema, in generale, insoluto.
- ✓ Ricorso a modelli di turbolenza (rappresentazioni schematiche); p.es.: Modello di Boussinesq
- ✓ Determinazione sperimentale degli sforzi turbolenti

- Stato di sforzo medio totale ($\rho = \text{cost}$)

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad ; \quad \underline{\underline{\tau}} = -\underline{\underline{p}}\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\mu}}\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\tau}}_R$$

- ✓ Posto $\bar{\tau}_{\mu ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ (sforzi medi viscosi), per valori di Re abbastanza alti si ha $\tau_{Rij} \gg \bar{\tau}_{\mu ij}$
- ✓ Anche in presenza di moto turbolento con $\tau_{Rij} \gg \bar{\tau}_{\mu ij}$ nella maggior parte della massa fluida, esiste generalmente uno strato di fluido aderente alle pareti, sede di un moto laminare (*sottostrato laminare* o *sottostrato viscoso*)
- ✓ Lo spessore del sottostrato laminare decresce all'aumentare del numero di Reynolds.



Equazioni per le parti medie

► Equazione globale del moto per le parti medie ($\rho = \text{cost}$)

- Forma generale per grandezze istantanee $\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}$
- Forma per fluido viscoso e grandezze istantanee $\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu$

$$- \vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV \quad - \vec{\Pi} = \int_{S_m} \vec{\tau}_n dS$$

$$- \vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad - \vec{\Pi}_p = \int_{S_c} -p \vec{n} dS$$

$$- \vec{G} = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV \quad - \vec{\Pi}_\mu = \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS$$

- Forma generale per le parti medie $\vec{I} + \vec{\bar{M}} = \vec{G} + \vec{\bar{\Pi}} + \vec{\Pi}_R$

- Forma per fluido viscoso e parti medie $\vec{I} + \vec{\bar{M}} = \vec{G} + \vec{\bar{\Pi}}_p + \vec{\bar{\Pi}}_\mu + \vec{\Pi}_R$

✓ $\vec{\Pi}_R = - \int_{S_c} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} dS$ deriva dagli stessi termini convettivi che hanno prodotto gli sforzi di Reynolds

✓ L'unico termine non lineare è il flusso di quantità di moto \vec{M}

$$\overline{\int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS} = \int_{S_c} \rho \vec{\bar{u}} \vec{\bar{u}} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_c} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} dS = \vec{\bar{M}} - \vec{\Pi}_R$$

► Teorema di Bernoulli

Per moto stazionario e percorsi sufficientemente brevi $\bar{H} = z + \frac{\bar{p}}{\gamma} + \frac{\bar{u}^2}{2g} = \text{cost}$